

Diario delle lezioni

Corso di *Analisi* per Fisica (canale D-K)

Giulio Galise*

25 settembre 2018, [Rif. [1]]. Introduzione al corso. Il campo ordinato $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$: assiomi relativi alle operazioni e all'ordinamento. Conseguenze: usuali regole di operazioni. Proprietà di continuità di \mathbb{R} , $\sqrt{2}$ non è razionale. Assioma di Dedekind. Definizioni di maggiorante e minorante, massimo e minimo. Insiemi limitati. Intervalli di \mathbb{R} .

27 settembre 2018 [Rif. [1]]. Estremo superiore ed inferiore di un insieme di numeri reali: esistenza, proprietà e caratterizzazioni. Proprietà di Archimede.

28 settembre 2018 [Rif. [1]]. Esercizi inf e sup. \mathbb{Q} non soddisfa l'assioma di Dedekind. Valore assoluto di un numero reale: definizione, proprietà, disequazioni. Distanza in \mathbb{R} , intorni.

2 ottobre 2018 [Rif. [2, 1]]. Principio di Cantor (intervalli incapsulati). Equivalenza "Dedekind \Leftrightarrow Cantor + Archimede" (*senza dim.*).

Principio di induzione (*senza dim.*) e buon ordine in \mathbb{N} . Solgimento esercizi:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx, \quad x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1}.$$

Generalità sulle funzioni: dominio codominio, immagine, controimmagine, grafici e proprietà di alcune funzioni elementari (potenza, modulo, richiami di trigonometria), funzioni pari e dispari, funzioni periodiche, composizione di funzioni, restrizioni.

4 ottobre 2018 [Rif. [2, 1]]. Funzioni monotone, iniettive e invertibili (definizioni ed esempi). Funzioni trigonometriche inverse.

Definizione di potenza con esponente reale, funzioni: $f(x) = x^\alpha$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$. Operazioni elementari sui grafici:

$$y = f(x) + c, \quad y = f(x + c), \quad y = cf(x), \quad y = f(cx), \quad y = |f(x)|, \quad y = f^\pm(x).$$

4 ottobre 2018 Esercitazione: svolgimento scheda 1.

9 ottobre 2018 [Rif. [2, 1]]. Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Successioni numeriche: definizione e rappresentazione cartesiana, limite di successioni, successioni convergenti, limitate e divergenti (con esempi). Teoremi di unicità del limite e di limitatezza di successioni convergenti.

*email: galise@mat.uniroma1.it

11 ottobre 2018 [Rif. [2, 1]]. Operazioni (algebriche) con i limiti (*dim. del caso $a_n b_n \rightarrow ab$*) e forme indeterminate “ $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ”. Teorema dei carabinieri e criterio del rapporto per successioni con esempi (successione geometrica, $\frac{\log n}{2^n}$).

12 ottobre 2018 [Rif. [2, 1]]. Calcolo di alcuni limiti: $\sqrt[p]{x}$ con $x > 1$, $\frac{n^p}{x^n}$ con $x > 1$ e $p \in \mathbb{N}$, $\frac{x^n}{n!}$ con $x > 1$, $\frac{n!}{n^n}$. Successioni monotone, regolarità successioni monotone. Esercitazione: scheda 2.

16 ottobre 2018 [Rif. [1]]. Esercitazione: scheda 2 (continuazione). Successioni estratte: $a_n \rightarrow L \Rightarrow a_{k_n} \rightarrow L$, non esistenza del limite di $(-1)^n$, $\sin(n\frac{\pi}{2})$, Teorema di Bolzano Weierstrass (*senza dim.*)

18 ottobre 2018 [Rif. [1, 3]]. Esercitazione: scheda 2 (fine). La successione $(1 + \frac{1}{n})^n$ ed il numero di Nepero “ e ”. Serie numeriche, definizioni ed esempi: serie telescopiche, serie armonica, serie geometrica.

19 ottobre 2018. Esercitazione: scheda 3.

23 ottobre 2018 [Rif. [1, 3]]. Serie numeriche: condizione necessaria di convergenza, serie a termini non negativi, criteri di confronto, confronto asintotico, radice e rapporto. Esempi di applicazione.

25 ottobre 2018 [Rif. [1, 3]]. Serie numeriche: criterio di condensazione di Cauchy (*senza dim.*), la serie armonica generalizzata $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, serie a termini di segno alterno e criterio di Leibniz, serie a termini di segno variabile, “convergenza assoluta \Rightarrow convergenza semplice”, esempi e controesempi.

26 ottobre 2018 [Rif. [1, 3]]. Punti di accumulazioni in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e insieme derivato. Esercitazione: scheda 4.

6 novembre 2018 [Rif. [1, 3]]. Definizione generale di limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $x_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$, interpretazione geometrica, teorema ponte, studio del caso $x_0, L \in \mathbb{R}$, esempio di non esistenza del limite $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, unicità del limite, operazioni (somma, prodotto, quoziente) e forme indeterminate, teorema dei carabinieri. Limite fondamentale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

8 novembre 2018 [Rif. [1, 3]]. Definizioni ε - δ ed esempi di $\lim_{x \rightarrow x_0} = L$ nei vari casi $x_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$. Limiti destro e sinistro. Limiti di funzioni composte e delle funzioni monotone su intervalli (*senza dim.*). Calcolo di $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} = \log x_0$, introduzione alla continuità.

9 novembre 2018 [Rif. [1, 3]]. Limiti notevoli. Funzioni continue, definizioni equivalenti, lo spazio $C(A)$ delle funzioni continue in A , continuità da destra e da sinistra. Le operazioni di addizione, prodotto, rapporto e composizione preservano la continuità. Classificazione dei punti di discontinuità (prima specie, seconda specie ed eliminabile). Teoremi per le funzioni continue: permanenza del segno, degli zeri, dei valori intermedi.

13 novembre 2018 [Rif. [1]]. Il teorema di Weierstrass.

Esercitazione: scheda 5.

15 novembre 2018. Esercitazione: scheda 5.

16 novembre 2018. I PROVA IN ITINERE.

20 novembre 2018 [Rif. [3, 1]]. Definizione di derivata, interpretazione geometrica (retta tangente) e cinematica (velocità istantanea), calcolo di derivate (x^α , $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, a^x), derivate destra e sinistra, punti angolosi e cuspidi. Continuità delle funzioni derivabili, algebra delle derivate con esempi. Derivate successive, gli spazi C^k e C^∞ .

22 novembre 2018 [Rif. [3, 1]]. Derivata funzione composta e funzione inversa. Esempi vari.

Massimi e minimi relativi ed assoluti: definizioni ed esempi.

23 novembre 2018 [Rif. [3, 1]]. Teorema di Fermat (condizione necessaria affinché una funzione derivabile ammetta un estremo locale in un punto interno al dominio). Teoremi di Rolle, Cauchy (*senza dim.*), Lagrange. Conseguenze del teorema di Lagrange: test di monotonia, riconoscimento punti stazionari, caratterizzazione funzioni costanti in un intervallo. Esempi e controesempi.

27 novembre 2018. Esercitazione: scheda 6. Funzioni iperboliche. Derivabilità tramite il limite della derivata (*senza dim.*).

29 novembre 2018 [Rif. [3, 1]]. Teorema di de L'Hôpital (dimostrazione del caso " $\frac{0}{0}$ ").

Applicazioni: calcolo di limiti e gerarchia degli ordini di infinito ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^b} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \log x = 0$).

Funzioni convesse 1: definizione, interpretazione geometrica, esempi, monotonia dei rapporti incrementali (*senza dim.*), continuità (u convessa in $I \Rightarrow u \in C^0(I)$).

30 novembre 2018 [Rif. [1, 3, 2]]. Funzioni convesse 2: caratterizzazioni funzioni convesse derivabili (f convessa $\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow f'$ crescente) e 2 volte derivabili (f convessa $\Leftrightarrow f'' \geq 0$), interpretazione geometrica.

Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Studio qualitativo del grafico di funzione. Esempio:

$$f(x) = \frac{\log x}{1 + |\log x|}$$

4 dicembre 2018 [Rif. [1, 3, 2]]. Approssimazione di una funzione mediante polinomi, la formula di Taylor: resto di Peano (o piccolo), polinomi di Taylor di e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\log(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$, resto di Lagrange (*senza dim.*), cenni sulla sviluppabilità in serie di Taylor, sviluppo in serie di e^x . Applicazioni: e è irrazionale, calcolo delle prime due cifre di e , ordini di infinitesimo e calcolo di limiti.

6 dicembre 2018 [Rif. [3, 2]]. Integrale di Riemann: partizioni, somme integrali superiori ed inferiori e proprietà, definizione di integrabilità, classe $\mathcal{R}(a, b)$ delle funzioni Riemann-integrabili nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, calcolo (mediante la definizione) di $\int_a^b c \, dx =$

$c(b - a)$, esempio di funzione non integrabile (la funzione caratteristica dei razionali), significato geometrico dell'integrale (area del sottografico), proprietà dell'integrale, linearità - monotonia - additività rispetto al dominio di integrazione- integrabilità di $|f|$ e disuguaglianza $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ (senza dim.).

7 dicembre 2018 [Rif. [3, 2]]. Caratterizzazione dell'integrale definito come "limite" di somme di Riemann al tendere a zero del diametro delle partizioni (senza dim.).

Esercitazione: scheda 7.

11 dicembre 2018 [Rif. [3]]. Classi di funzioni integrabili: funzioni monotone, funzioni continue (intermezzo sull'uniforme continuità). Teorema della media integrale, teorema fondamentale del calcolo integrale, formula fondamentale del calcolo integrale.

13 dicembre 2018 [Rif. [3, 1, 2]]. Regole di integrazione (finita e indefinita): scomposizione, integrazione funzioni razionali, integrazione per parti e per sostituzione. Esempi.

14 dicembre 2018 [Rif. [3, 1, 2]]. Ancora sul metodo di integrazione per sostituzione (ulteriori esempi).

Esercitazione: scheda 8 (prima parte).

18 dicembre 2018 [Rif. [2]]. Esercitazione: scheda 8 (seconda parte). Intermezzo su funzioni Lipschitz e Hölder, lipschitzianità funzione integrale.

Introduzioni alle equazioni differenziali ordinarie: definizioni, integrale generale, ordine, esempi. Equazioni differenziali lineari del primo ordine $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, linearità dell'operatore $L : C^1 \mapsto C^0$ definito da $L(y) = y' + a(t)y$, $\ker L$ è il sottospazio vettoriale di C^1 costituito dall'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

20 dicembre 2018 [Rif. [2]]. Integrale generale di $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, problema di Cauchy, sistemi disaccoppiati di equazioni lineari del primo ordine. Esempi.

Equazioni lineari del secondo ordine. Soluzioni linearmente indipendenti, teorema di struttura (senza dim.) dell'integrale generale. Costruzione di soluzioni linearmente indipendenti di equazioni omogenee a coefficienti costanti: $y''(t) + 2by'(t) + cy(t) = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, equazioni caratteristica, studio del caso $b^2 - c > 0$.

21 dicembre 2018, 4 ore [Rif. [2]]. Integrale generale dell'equazione lineare a coefficienti costanti $y''(t) + 2by'(t) + cy(t) = 0$, casi $b^2 - c = 0$ e $b^2 - c < 0$. Intermezzo di analisi complessa: successioni convergenti in \mathbb{C} , l'esponenziale complesso e la formula di Eulero

$$e^{ix} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n = \cos(x) + i \sin(x)$$
$$e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Cenno allo sviluppo in serie $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Funzioni complesse di variabile reale, derivabilità. Equazioni differenziali e modelli: oscillatore armonico con e senza presenza di attrito, problema di Cauchy, moti periodici, periodici smorzati (oscillazioni sotto/sovrasmorzate e critiche). Studio dell'equazione completa $y''(t) + 2by'(t) + cy(t) = f(t)$ nel caso

$$f(t) = e^{\alpha t} (p(t) \cos(\beta t) + q(t) \sin(\beta t))$$

con $p(t)$, $q(t)$ polinomi. Esempi.

8 gennaio 2019. Esercitazione: scheda 9 (prima parte).

11 gennaio 2019. Esercitazione: scheda 9 (seconda parte).

15 gennaio 2019. Esercitazione: scheda 10.

17 gennaio 2019. Struttura vettoriale euclidea di \mathbb{R}^n , prodotto scalare, norma e distanza indotta. Intorni.

Curve in \mathbb{R}^n , definizioni, esempi, lunghezza di una curva di classe C^1 . Integrali curvilinei di prima specie, applicazioni al calcolo di baricentri di fili.

Funzioni di più variabili, derivate parziali, derivate direzionali e formula del gradiente.

18 gennaio 2019. II PROVA IN ITINERE.

Riferimenti bibliografici

- [1] E. Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri (preferibilmente prima o seconda edizione).
- [2] C. Mascia, L. Lamberti, *Note di base di Analisi Matematica*, dispense.
- [3] C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica 1*, Zanichelli.